Clase 12

Potencial Eléctrico

Cálculo del potencial eléctrico

Calculo del potencial eléctrico a partir del campo eléctrico

Ejemplo 27: Potencial fuera de una distribución de carga con simetría esférica.

Supongamos que tenemos una esfera de radio R con una densidad de carga con simetría esférica y carga total Q. Fuera de la esfera el campo eléctrico es el de una carga puntual Q colocada en el centro de la esfera. El cálculo del potencial fuera de la esfera es entonces igual al que hicimos para la carga puntual con el resultado:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} \qquad r > R$$

Para calcular el potencial dentro de la esfera debemos conocer la forma explícita de la densidad de carga.

Ejemplo 28: Potencial creado por una esfera conductora con carga Q

Este ejemplo resulta una aplicación del ejemplo anterior. La carga en la esfera conductora se distribuye con simetría esférica de forma que el campo dentro de la esfera se anula. Fuera el campo es el de una carga puntual Q. El potencial dentro de la esfera entonces es igual al potencial sobre su superficie pues la integral de linea por cualquier camino dentro del conductor se anula. Obtenemos,

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} \qquad r > R \\ V(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R} \qquad r \leq R \end{aligned}$$

Ejemplo 29: Potencial de una distribución de carga con simetría esférica.

Supongamos ahora que tenemos una esfera de radio R con una densidad de carga $\rho(r) = Ar^2$ y queremos calcular el potencial en cualquier punto del espacio. Esta configuración tiene simetría esférica y carga total $Q = 4\pi\frac{AR^5}{5}$. El campo eléctrico lo calculamos en un ejemplo de una clase anterior.

Fuera de la esfera el campo eléctrico es el de una carga puntual Q colocada en el centro de la esfera. El cálculo del potencial fuera de la esfera es entonces igual al que hicimos para la carga puntual con el resultado:

$$r \geq R \quad V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} \quad .$$

Para calcular el potencial dentro de la esfera notamos que ya que conocemos el potencial sobre la esfera solo tenemos que calcular la integral de línea sobre del camino dentro de la esfera. Si escogemos un camino que vaya en la dirección radial tenemos:

$$r < R \quad , \quad \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{A}{\epsilon_0}\frac{r^3\hat{\mathbf{r}}}{5} \quad , \quad V(r) = V(R) - \frac{A}{\epsilon_0}\int_R^r \frac{r^3 dr}{5}$$

Haciendo la integral el potencial queda,

$$r < R \quad , \quad V(r) \quad = \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R} - \frac{A}{5\epsilon_0}\left.\frac{r^4}{4}\right|_R^r = \frac{AR^4}{4\epsilon_0} - \frac{Ar^4}{20\epsilon_0}$$

Notemos que con esta expresión también recuperamos el valor sobre la superficie.

Cálculo del potencial eléctrico a partir de la distribución de carga

Veamos ahora algunos ejemplos en que se calcula el potencial directamente a partir de la distribución de cargas. En general las integrales que aparecenson simples de evaluar solo en algunos puntos del espacio tipicamente sobre los ejes de simetría

Ejemplo 31: Potencial debido a un aro de carga de radio R con densidad λ en un punto sobre su eje.

Escogemos el sistema de coordenadas con el eje z pasando por el centro del aro y el aro en el plano xy. El punto donde nos interesa el potencial es $\vec{\mathbf{r}} = z\hat{\mathbf{z}}$. Los puntos de la distribución de carga los parametrizamos como $\vec{\mathbf{r}}'(\varphi) = Rcos(\varphi)\hat{\mathbf{x}} + Rsen(\varphi)\hat{\mathbf{y}}$. El elemento de línea es $dl = Rd\varphi$. El potencial

$$\begin{aligned} V(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\lambda(\vec{\mathbf{r}}')dl}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{Rd\varphi}{\sqrt{R^2+z^2}} \\ &= \frac{\lambda}{2\epsilon_0\sqrt{R^2+z^2}} \end{aligned}$$

Ejemplo 32: Potencial debido a un disco de radio R con densidad σ en un punto sobre su eje.

Escogemos el sistema de coordenadas con el eje z pasando por el centro del disco y el disco en el plano xy. El punto donde nos interesa el potencial es $\vec{\mathbf{r}} = z\hat{\mathbf{z}}$. Los puntos de la distribución los parametrizamos como $\vec{\mathbf{r}}'(r_\rho, \varphi) = r_\rho cos(\varphi)\hat{\mathbf{x}} + r_\rho sen(\varphi)\hat{\mathbf{y}}$. El elemento de superfície es $dS = r_\rho d\varphi dr_\rho$. El potencial

$$\begin{aligned} V(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma(\vec{\mathbf{r}}')dS}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{r_\rho d\varphi dr_\rho}{\sqrt{r_\rho^2+z^2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2}-z\right) \end{aligned}$$

Superficies equipotenciales

Para una determinada configuración de cargas el potencial eléctrico es una función escalar regular que es continua excepto en los puntos donde se encuentran las cargas eléctricas en los cuales puede hacerse divergente. Puntos adyacentes tienen valores del potencial que no difieren mucho entre si. Los puntos que tienen el mismo valor del potencial forman superficies suaves. Estas superficies se llaman superficies equipotenciales. De su definición sigue que:

- Las superficies equipotenciales no se tocan entre si pues en cada punto el potencial puede tomar un único valor.
- Las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo pues el producto $\vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{dl}}$ debe anularse cuando $\vec{\mathbf{dl}}$ es paralelo a la superficie. Dicho de otra manera, el campo eléctrico es siempre perpendicular a las superficies equipotenciales.

Ejemplo 33: Superficies equipotenciales de algunas configuraciones de carga.

Las superficies equipotenciales del potencial creado por un plano cargado son los planos paralelos al plano.

Las superficies equipotenciales del potencial creado por una carga puntual son esferas concéntricas con centro en la carga. Las superficies equipotenciales de cualquier distribución esféricamente simétrica de carga son esferas concéntricas con centro el el centro de simetría de la configuración.

Las superficies equipotenciales de una configuración cilíndrica de carga son cilindros coaxiales con eje igual al eje de simetría de la configuración.

La superficie de cualquier conductor en equilibrio es una superficie equipotencial.